GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Exercice 1. On définit la permutation $\sigma \in S_{10}$ par

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints et en déduire la signature $\varepsilon(\sigma)$.

Faire de même pour $\tau \in S_n$ définie par

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Ordre d'une permutation)**.** Soit $\sigma \in S_n$. On définit <u>l'ordre de σ</u> comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$ (on admet qu'un tel k existe toujours).

1) Donner l'ordre de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Quel est l'ordre d'une transposition ? D'un 3-cycle ?
3) Quel est l'ordre d'un p-cycle ?
4) En déduire l'ordre de la permutation spiralée à 6 éléments :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5) Quel est l'ordre de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$?
6) Soit p, q des entiers premiers entre eux supérieurs ou égaux à 2. Soit σ_p et σ_q deux cycles de longueurs respectives p et q, à supports disjoints. Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad (\sigma_p\sigma_q)^m = \mathrm{id} \iff pq \mid m$$

En déduire l'ordre de $\sigma_p\sigma_q$.

Calcul de déterminants

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants (avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$) :

1)
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

2)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$$

3)
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

4)
$$\begin{vmatrix} 13 & -17 & 7 \\ 26 & 34 & 28 \\ 39 & 0 & -56 \end{vmatrix}$$

5)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

6)
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants (avec $a \in \mathbb{C}$) :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$

Exercice 5 (Déterminants de taille n)**.** Calculer les déterminants de taille n suivants (pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que les expressions aient un sens)

$$d_n = \begin{vmatrix} & & \mathbf{0} & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & \ddots & & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & \mathbf{0} & & 1 \end{vmatrix} \qquad D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & & \mathbf{0} \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ \mathbf{0} & & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & & & b \\ b & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a & b \\ b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R} \qquad \delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 6 ($\star$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer le <u>déterminant de Vandermonde</u> :

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Applications des déterminants

Exercice 7. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ?

1) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (2-i, 0, -i)$.
2) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda + 3, 3\lambda + 1)$, $u_2 = (2\lambda + 3, 5\lambda + 4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2 + 3X - 1$, $P_2 = 2X^2 - 2X + 3$, $P_3 = 3X^2 + 2X - 4$.
4) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$.

Exercice 8. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = P - \alpha X P'$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer pour quelles valeurs de α l'application φ n'est pas bijective.